Lógica

Deducción Natural en Lógica de Primer Orden

Damiano Zanardini

Graduado/a en Ingeniería Informática
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid
damiano@fi.upm.es

Curso Académico 2010/2011

Lo que ya podemos hacer

$T[p \longrightarrow q, \quad q \longrightarrow r] \vdash p \longrightarrow r$

1:	p	supuesto
2:	$p \longrightarrow q$	premisa
3:	q	(1,2)
4:	$q \longrightarrow r$	premisa
5:	r	(3,4)
6:	$p \longrightarrow r$	(1-5)

Lo que ya podemos hacer

$T[\exists x p(x) \rightarrow \forall y q(y), \;\; \forall y q(y) \rightarrow \forall z s(z)] \vdash \exists x p(x) \rightarrow \forall z s(z)$

1:	$\exists x p(x)$	supuesto
2:	$\exists x p(x) \rightarrow \forall y q(y)$	premisa
3:	$\forall y q(y)$	(1,2)
4:	$\forall y q(y) \rightarrow \forall z s(z)$	premisa
5:	$\forall z s(z)$	(3,4)
6:	$\exists x p(x) \rightarrow \forall z s(z)$	(1-5)

- las F y G que aparecen en las reglas que dimos en su día denotan fórmulas de la lógica de primer orden

Lo que todavía no podemos hacer

$T[\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \;\; \forall x(q(x) \rightarrow s(x))] \vdash \forall x(p(x) \rightarrow s(x))$

1: ¿?
2: ¿?
...
n: $\forall x(p(x) \rightarrow s(x))$

Necesitamos reglas para

- *abrir* la fórmulas cuantificadas
- aplicar las reglas de siempre
- *cerrar* las fórmulas resultantes

Nuevas reglas: dos fáciles

Cuantificador universal

- eliminación: para todo término t

$$[\forall_{elim}] \ \frac{\forall x F}{F\{x/t\}_\ell}$$

con la condición que se pueda aplicar la sustitución, es decir, que t sea libre para x en F

$T[p(a) \rightarrow q(a), \ \ \forall x p(x)] \vdash q(a)$

1:	$\forall x p(x)$	premisa
2:	$p(a)$	$\forall_{elim}(1)$
3:	$p(a) \rightarrow q(a)$	premisa
4:	$q(a)$	(2,3)

Nuevas reglas: dos fáciles

Cuantificador existencial

- introducción

$$[\exists_{intro}]\ \frac{F\{x/t\}_\ell}{\exists x F}$$

$T[\forall x(p(x) \wedge q(x))] \vdash \exists x(p(x) \vee s(x))$

1:	$\forall x(p(x) \wedge q(x))$	premisa
2:	$p(a) \wedge q(a)$	(1)
3:	$p(a)$	(2)
4:	$p(a) \vee s(a)$	(3)
5:	$\exists x(p(x) \vee s(x))$	$\exists_{intro}(4)$

Nuevas reglas: dos más difíciles

Lo que queda

- nos quedan la introducción de cuantificador universal y la eliminación del cuantificador existencial
- en los dos casos hay que tener cuidado con la forma global de la demostración
- y las dos definiciones, en cierto sentido, van juntas

Nuevas reglas: dos más difíciles

Cuantificador universal: introducción

- $$[\forall_{intro}] \quad \frac{F\{x/t\}_\ell}{\forall x F}$$ (con ciertas condiciones sobre t...)

Justificación

"sea un triángulo *a* cualquiera [...varios pasos deductivos...] por lo tanto, en *a* sus ángulos suman 180 grados, así que en todo triángulo sus ángulos suman 180 grados"

- el punto es que, a la hora de usar la constante *a*, nunca requerimos que tenga ninguna propiedad concreta
- es decir, *a* no aparece en ninguna de las premisas

Nuevas reglas: dos más difíciles

Cuantificador universal: introducción

- $$[\forall_{intro}] \quad \frac{F\{x/t\}_\ell}{\forall x F}$$ (con ciertas condiciones sobre t...)

$T[\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \quad \forall x(q(x) \rightarrow s(x))] \vdash \forall x(p(x) \rightarrow s(x))$

1:	$\forall x(p(x) \rightarrow q(x))$	premisa
2:	$\forall x(q(x) \rightarrow s(x))$	premisa
3:	$p(a) \rightarrow q(a)$	$\forall_{elim}(1)$
4:	$q(a) \rightarrow s(a)$	$\forall_{elim}(2)$
5:	$\quad p(a)$	supuesto
6:	$\quad q(a)$	(3,5)
7:	$\quad s(a)$	(4,6)
8:	$p(a) \rightarrow s(a)$	(5-7)
9:	$\forall x(p(x) \rightarrow s(x))$	$\forall_{intro}(8)$

- notamos que a se usa sólo después de introducirlo con $\forall_{elim}$

Nuevas reglas: dos más difíciles

Cuantificador universal: introducción

- $$[\forall_{intro}] \quad \frac{F\{x/t\}_\ell}{\forall x F}$$ (con ciertas condiciones sobre t...)

Las condiciones

- t puede contener constantes o variables; ninguna de ellas puede aparecer (libre, si es una variable) en las premisas

$T[p(a),\ \ \forall x(p(x) \rightarrow p(f(x))),\ \ \neg p(b)] \vdash \forall x p(x)$

1:	$p(a)$	premisa
2:	$\forall x(p(x) \rightarrow p(f(x)))$	premisa
3:	$p(a) \rightarrow p(f(a))$	(2)
4:	$p(f(a))$	(1,3)
5:	$\forall x p(x)$	(4)

Nuevas reglas: dos más difíciles

Cuantificador universal: introducción

- $$[\forall_{intro}] \quad \frac{F\{x/t\}_\ell}{\forall x F}$$ (con ciertas condiciones sobre t...)

Las condiciones

- t puede contener constantes o variables; ninguna de ellas puede aparecer (libre, si es una variable) en supuestos que no hayan sido cancelados todavía

$T[\forall x(p(x) \rightarrow p(f(x))), \quad \neg p(b)] \vdash \forall x p(x)$

1:	$\forall x(p(x) \rightarrow p(f(x)))$	premisa
2:	$\quad p(a)$	supuesto
3:	$\quad p(a) \rightarrow p(f(a))$	(1)
4:	$\quad p(f(a))$	(2,3)
5:	$\quad \forall x p(x)$	(4)
6:	$p(a) \rightarrow \forall x p(x)$	(2-5)

Nuevas reglas: dos más difíciles

Cuantificador universal: introducción

- $$[\forall_{intro}] \quad \frac{F\{x/t\}_\ell}{\forall x F}$$ (con ciertas condiciones sobre t...)

Las condiciones

- t puede contener constantes o variables; ninguna de ellas puede haber sido introducida (como constante) por la regla $\exists_{elim}$

$T[\exists x p(x)] \vdash \forall x p(x)$

1:	$\exists x p(x)$	premisa
2:	$p(a)$	(1)
3:	$\forall x p(x)$	(2)

- para acordarnos de esto desplazamos la segunda fórmula...

Nuevas reglas: dos más difíciles

Cuantificador existencial: eliminación

- $$[\exists_{elim}] \ \frac{\exists x F}{F\{x/c\}_\ell}$$ (con ciertas condiciones sobre la constante c...)

Discusión

- sabemos que F vale para al menos un individuo...
- pongamos que este individuo se llame c
- es una constante porque no podemos asumir que este individuo sea $f(a)$ para ciertos f y a

Nuevas reglas: dos más difíciles

Cuantificador existencial: eliminación

- $$[\exists_{elim}] \quad \frac{\exists x F}{F\{x/c\}_\ell}$$ (con ciertas condiciones sobre la constante c...)

Las condiciones

- cuando introducimos una constante (llamada *constante temporal*), esta debe ser nueva: no ha aparecido antes en la demostración, ni en las premisas
- a partir de la introducción de c (paso n_1), tengo que haber llegado (dentro de la demostración principal) a una fórmula G (paso n_2)
  - G no puede contener c
  - de las fórmulas entre los pasos n_1 y n_2, sólo G (paso n_2) se puede usar en el resto de la demostración
  - ☞ para acordarnos de esto, desplazamos las fórmulas entre el paso n_1 y el paso $n_2 - 1$ (inclusive) *como si fueran supuestos*

Nuevas reglas: dos más difíciles

Cuantificador existencial: eliminación

- $$[\exists_{elim}] \quad \frac{\exists x F}{F\{x/c\}_\ell}$$ (con ciertas condiciones sobre la constante c...)

$T[\exists x(p(x) \wedge q(x))] \vdash \exists x p(x)$

1:	$\exists x(p(x) \wedge q(x))$	premisa
2:	$\quad p(a) \wedge q(a)$	(1)
3:	$\quad p(a)$	(2)
4:	$\exists x p(x)$	(2-3)

Nuevas reglas: dos más difíciles

Cuantificador existencial: eliminación

- $$[\exists_{elim}] \ \frac{\exists x F}{F\{x/c\}_\ell}$$ (con ciertas condiciones sobre la constante c...)

Convenciones y normas

- la introducción de las nuevas variables se trata como si fueran supuestos: hay que cancelarlos
- la cancelación consiste en quedarse sólamente con una G que no contiene c, sin poder utilizar las fórmulas intermedias en lo que sigue
- notamos que no se puede eliminar c con $\forall_{intro}$
- el primer *desplazamiento* (supuesto o constante temporal) que se cancela es el último que se introdujo

Nuevas reglas: dos más difíciles

Cuantificador existencial: eliminación

- $$[\exists_{elim}] \ \frac{\exists x F}{F\{x/c\}_\ell}$$ (con ciertas condiciones sobre la constante c...)

$T[\exists x p(x), \ \ \forall x(p(x) \rightarrow q(a))] \vdash q(a)$

- aunque no es lo normal, la constante temporal se puede eliminar sin usar la regla $\exists_{intro}$

1:	$\exists x(p(x))$	premisa
2:	$\forall x(p(x) \rightarrow q(a))$	premisa
3:	$\quad p(b)$	(1)
4:	$\quad p(b) \rightarrow q(a)$	(2)
5:	$q(a)$	(3-4)

Reglas derivadas

Intercambio de cuantificadores

$$[\neg\forall] \ \frac{\neg\forall x F}{\exists x \neg F}$$

$$[\exists] \ \frac{\exists x \neg F}{\neg\forall x F}$$

$$[\neg\exists] \ \frac{\neg\exists x F}{\forall x \neg F}$$

$$[\forall] \ \frac{\forall x \neg F}{\neg\exists x F}$$

Última cosa importante

- las reglas de los cuantificadores no se aplican dentro del intercambio:
  - no puedo usar $\forall_{elim}$ para pasar de $\neg\forall x p(x)$ a $\neg p(a)$
- porque no son equivalencias